

编者按:《岩土力学》已于 2019 年入选“中国科技期刊卓越行动计划”梯队期刊建设项目,以此为契机,《岩土力学》编辑部决定自 2021 年起开辟“岩土力学卓越论坛”栏目,主要刊登我国岩土力学与工程界著名专家学者及其研究团队的科研成果和重大项目研究新进展,进一步推动岩土力学与工程领域的学术交流,促进中国岩土力学与工程的健康可持续发展。本期推出郑宏教授的撰文以飨读者。

岩土力学卓越论坛

DOI: 10.16285/j.rsm.2020.1393

弹塑性有限元分析中几个难点问题的一揽子方案

郑 宏, 张 谭, 王秋生

(北京工业大学 城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124)

摘 要: Mohr-Coulomb 准则在 Mohr 应力空间中具有最简形式,同时也因其非常可靠而在经典的极限分析或极限平衡法中得到了最广泛的应用。然而,应力空间中的 Mohr-Coulomb 屈服面是非光滑的,这给基于变形分析的弹塑性有限元法中的本构积分带来了巨大的麻烦。此外,在求解强度问题时,基于载荷控制法(LCM)的求解器很难将有限元模型带入极限平衡状态。针对这些问题,本研究给出了以下解决方案。首先,设计了适用于带非光滑屈服面的塑性本构积分算法 GSPC。GSPC 对任意大小的应变增量都收敛,数值特性远优于现有的返回-映射算法。还为弹塑性有限元分析定制了一个位移控制法(DCM)求解器,该 DCM 能将有限元模型带入极限平衡状态而不存在收敛性方面的问题,计算效率和鲁棒性都远优于现有的基于 LCM 的求解器。最后,结合强度折减法,建议了解边坡安全系数的割线法,并给出了极限平衡状态下坡顶拉裂缝位置和深度的确定技术。

关 键 词: 塑性本构积分; Mohr-Coulomb 屈服面; 位移控制法; 边坡稳定性; 拉裂缝

中图分类号: O 241

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2021)02-0301-14



One package of schemes for some difficult issues in finite element plasticity analysis

ZHENG Hong, ZHANG Tan, WANG Qiu-sheng

(Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering of Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The Mohr-Coulomb yield criterion takes on the simplest form in the Mohr stress space, which has thus been most extensively applied in limit analysis and limit equilibrium methods because of its accuracy. However, the Mohr-Coulomb yield surface in the stress space is non-smooth, causing huge troubles to the constitutive integration in the deformation based finite element plasticity analysis. In addressing strength problems, meanwhile, solvers based on the load controlled method (LCM) are hard to bring the finite element model to the limit equilibrium state. Aiming at these issues, the solution schemes are proposed as follows. First, an algorithm named GSPC is designed for the constitutive integration for plasticity with non-smooth yield surfaces. GSPC is always convergent for arbitrary large strain increments, with far more excellent numerical properties than the return-mapping methods available. A solver based on the displacement controlled method (DCM) is developed for the finite element plasticity analysis. The DCM solver is able to bring easily the finite element model into the limit equilibrium state, with no convergence issue, and far more efficient and robust than any LCM solvers. At last, combined with the strength reduction method, the secant method for the factor of safety of slopes is developed, and the location and depth of tension cracks at the slope top are proposed.

Keywords: constitutive integration for plasticity; Mohr-Coulomb yield surface; displacement controlled method; slope stability; tension cracks

收稿日期: 2020-09-16

修回日期: 2021-01-04

基金项目: 国家自然科学基金(No. 52079002)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52079002).

第一作者简介: 郑宏, 男, 1964 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土力学数值分析等方面的教学和研究工作。E-mail: hzheng@whrsm.ac.cn

1 引言

传统的强度问题包括地基承载力计算、挡土墙压力估计和边坡稳定性分析。

强度问题的经典方法,如极限分析和极限平衡法,一般不涉及到变形的计算。Mohr 应力空间中的 Mohr-Coulomb 屈服准则具有最简形式,同时也因 Mohr-Coulomb 准则非常可靠,至今仍然是居于统治地位的岩土失效准则。

然而,主应力空间中的 Mohr-Coulomb 屈服面是由 6 张光滑曲面片拼接而成的,在相邻两张平面的交棱上的点是不光滑的,即这些点的法线不唯一,从而给弹塑性变形有限元分析中的本构积分带来了不小的困难。无拉应力截断将使得屈服面的片数增加到 9,会更进一步增加本构积分的难度。已经设计了大量的算法来应对这一问题,但没有一个能够从理论上确保算法的收敛性。实际计算时为了确保收敛和计算精度,必须使得应变增量充分小。本文将在第 2 节解决这一问题。

用主应力表示屈服面比用应力不变量和 Lode 角要简单和直观。然而,为了求得屈服函数或塑性势函数关于应力分量的偏导数,需要计算主应力关于应力分量的偏导数。我们在第 3 节推导了相应的计算公式,这对于本构积分无疑是非常重要的。

若采用基于变形的有限元法来求解强度问题,需将岩土介质视为理想弹塑性材料。然后,通过超载或降强的方式将地基或边坡带入极限平衡状态。此时,地基或边坡将退化成一个机构,即在外载维持不变的条件下,部分地基或坡体将沿其临界滑面发生滑移。然而,为了提升程序的鲁棒性,即便非常成熟的商用软件也不接受理想弹塑性假定,如 Abaqus 将理想弹塑性材料近似为硬化模量极小的应变强化材料。而且,求解非线性平衡方程组的牛顿法大都是通过逐步增加外荷来实施的,即所谓的载荷控制法 (LCM)。在地基或边坡尚未进入极限平衡状态时,LCM 就会因不收敛而导致计算中断。本文在第 4 节建议的位移控制法 (DCM) 就是针对 LCM 的这一问題而设计的。第 5 节结合强度折减法,建议了求解边坡安全系数的割线法,提出了坡顶拉裂缝位置和深度的确定方法。第 6 节展示了本文所建议的方案在边坡稳定性分析中的应用,并指出了坡顶拉裂缝深度的 Michalowski 估计的不足。第 7 节是结论和展望。

2 带非光滑屈服面的塑性本构积分

图 1(a)显示了主应力空间 $\tau_1 - \tau_2 - \tau_3$ 中的 Mohr-

Coulomb 屈服面,它是由 6 张平面所组成的,它与 π 平面 ($\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \text{常数}$) 的交线是一个不等边六边形。在相邻两张平面的交棱上的点是不光滑的,即这些点的法线不唯一,从而给塑性本构积分(无论是隐格式^[1]还是显格式^[2])带来了极大的困难。根据关联流动法则,位于屈服面上的应力点的塑性应变率方向就是屈服面在这一点的外法线方向。无拉应力截断将使得屈服面的片数增加到 9,如图 1(b)所示,会更进一步增加本构积分的难度。

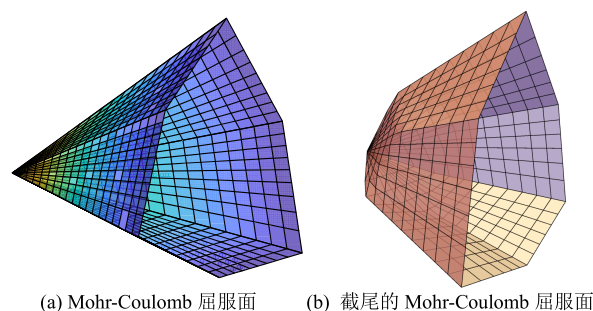


图 1 Mohr-Coulomb 屈服面
Fig.1 Mohr-Coulomb yielding surfaces

对带非光滑屈服面的塑性本构积分的处理方案大致可分为两种:其一是做光滑逼近;其二是直接处理非光滑屈服面。

对 Mohr-Coulomb 屈服面最简单、也是最粗糙的光滑逼近就是 Drucker-Prager 屈服面:说它最简单是因为 Drucker-Prager 屈服面的函数形式最简单也最光滑,其与 π 平面的交线是一个圆;说它最粗糙是因为遵守 Drucker-Prager 准则就意味着岩土材料的拉压强度相等。Drucker-Prager 屈服面对 Mohr-Coulomb 屈服面的逼近方式是不唯一的,例如,可令 Drucker-Prager 屈服面外接于 Mohr-Coulomb 屈服面的大棱或小棱;也可令 Drucker-Prager 屈服面在 π 平面上的圆的面积等于 Mohr-Coulomb 屈服面的不等边六边形的面积^[3]。Drucker-Prager 屈服面可以说是对 Mohr-Coulomb 屈服面的整体磨平。

为克服 Drucker-Prager 屈服面的粗大误差,自 Zienkiewicz^[4]、Menetrey^[5]等以来,对 Mohr-Coulomb 屈服面的磨平工作就从来没有停止过^[6-7],采用的都是局部磨平技术。要求磨平后的屈服面充分逼近 Mohr-Coulomb 屈服面、屈服函数为凸且二阶光滑。这些要求相互冲突,所以得到一个令人满意的、局部磨平的 Mohr-Coulomb 屈服面并非易事。磨平无一例外地会导致误差,还会牺牲效率,因为当应力点位于屈服面上曲率较大的部位时,为确保收敛,必须使得应变增量充分小。

处理非光滑屈服面的第2种方法就是直接面对非光滑的屈服面。其中最简单的莫过于 Owen 等^[8]所建议的方法：当应力点位于 Mohr-Coulomb 屈服面的棱线上时，规定其法线的方向为相邻两个屈服面法线的平均方向。但这仅适用于显式积分，对于隐式积分会因为法线的不连续变化而导致收敛方面的问题。

隐式的映射-返回算法都可归结为一个非光滑方程组问题。因为在迭代求解过程中需不断变更活动的屈服面片，所以本质上都属于试验-误差解法，其收敛性在理论上难以保证。在实际计算中为了确保收敛，必须使得应变增量充分小。带非光滑屈服面的塑性积分的相关文献综述可参阅文献[9-11]。

本节我们将弹塑性本构积分问题归结为一个非线性混合互补问题，设计了相应的算法，并从理论上证明了算法的收敛性。

2.1 率形式的理想弹塑性本构关系

对于弹塑性材料，应力率向量 $\dot{\sigma}$ 与应变率向量 $\dot{\varepsilon}$ 的关系为

$$\dot{\sigma} = D(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) \quad (1)$$

式中： D 为正定对称的 6×6 阶弹性矩阵^[12]； $\dot{\sigma}$ 和 $\dot{\varepsilon}$ 同属于六维向量，但是 $\dot{\varepsilon}$ 已知且有 6 个分量，即 $\dot{\varepsilon}_x$ 、 $\dot{\varepsilon}_y$ 、 $\dot{\varepsilon}_z$ 、 $\dot{\gamma}_{yz}$ 、 $\dot{\gamma}_{zx}$ 和 $\dot{\gamma}_{xy}$ ， $\dot{\sigma}$ 未知且具有与 $\dot{\varepsilon}$ 相同顺序的下标，规定受拉为正； $\dot{\varepsilon}_p$ 为塑性应变率向量， $\dot{\varepsilon}_p$ 未知，具有与 $\dot{\varepsilon}$ 相同顺序的下标，其值由 Koiter 流动法则决定^[12]：

$$\dot{\varepsilon}_p = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i \quad (2)$$

式中： m 为组成完整屈服面的光滑曲面片的数目； $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 为非负的塑性乘子； $\nabla g_1, \dots, \nabla g_m$ 分别是塑性势函数 $g_1, \dots, g_m$ 的梯度，将在下面给予更多的解释。

除了 $\dot{\varepsilon}$ 和 D ，式 (1)、(2) 中的所有量都非线性地依赖于当前的应力向量 σ 和塑性乘子向量 λ ，记为 $\dot{\sigma}(\sigma, \lambda)$ ， $\dot{\varepsilon}_p(\sigma, \lambda)$ 和 $g_i(\sigma, \lambda)$ 。但是为了简化公式，我们略去依附于 $\dot{\sigma}$ 等的变元 (σ, λ) 。

关于式 (2) 需要做如下说明：

(1) 式 (2) 中的 m 为组成完整屈服面的光滑曲面片的数目，这些曲面片围成了六维应力空间中弹性域 E_σ ：

$$E_\sigma \triangleq \{\tau \in R^6 | y(\tau) \leq 0\} \quad (3)$$

式中：符号 $\triangleq$ 读作“定义为”； $y: R^6 \rightarrow R^m$ 是以六阶向量 τ 为自变量的向量值函数，共有 m 个分量函

数，即 $y_1(\tau), \dots, y_m(\tau)$ ； $y_i(\tau) = 0$ 代表弹性区 E_σ 的第 i 个边界曲面片方程；屈服函数 $y_i(\tau)$ 是凸函数。式 (3) 中的 $y(\tau) \leq 0$ 表示 $y(\tau)$ 的所有 m 个分量函数 $y_i(\tau) \leq 0$ ， $i = 1, \dots, m$ 。这表明应力点 τ 只能位于 E_σ 内部及其边界上。由于本文仅关注理想弹塑性材料，因此， E_σ 在应力空间中保持不变。

以完整的 Mohr-Coulomb 屈服面为例。在主应力空间 $\tau_1 - \tau_2 - \tau_3$ 中， E_σ 是一个由 6 张平面围成的不等边六面锥，即 $m = 6$ ，如图 1(a) 所示，这 6 张屈服面的屈服函数依次为

$$\left. \begin{aligned} y_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= (\tau_1 - \tau_3) + (\tau_1 + \tau_3) \sin \varphi - 2c \cos \varphi \\ y_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= (\tau_2 - \tau_3) + (\tau_2 + \tau_3) \sin \varphi - 2c \cos \varphi \\ y_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= (\tau_2 - \tau_1) + (\tau_2 + \tau_1) \sin \varphi - 2c \cos \varphi \\ y_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= (\tau_3 - \tau_1) + (\tau_3 + \tau_1) \sin \varphi - 2c \cos \varphi \\ y_5(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= (\tau_3 - \tau_2) + (\tau_3 + \tau_2) \sin \varphi - 2c \cos \varphi \\ y_6(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= (\tau_1 - \tau_2) + (\tau_1 + \tau_2) \sin \varphi - 2c \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中： c 为黏聚力； φ 为内摩擦角。Mohr-Coulomb 屈服面围成的弹性区 E_σ 有 6 条棱和 1 个顶点，其上的点是非光滑的。特别地，若将 φ 取为 0，则 Mohr-Coulomb 准则退化为 Tresca 准则，适用于不排水的瞬态工况。

若考虑拉应力截断，可以得到截尾后的 Mohr-Coulomb 屈服面，如图 1(b) 所示。此时，主应力空间中的 E_σ 将增加如下 3 个平面片：

$$\left. \begin{aligned} y_7(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \tau_1 \\ y_8(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \tau_2 \\ y_9(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \tau_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

因此，截尾的 Mohr-Coulomb 屈服面将由 9 张曲面片组成，即 $m = 9$ ，也会因此而出现更多的棱和顶点。

(2) 相应于第 i 张屈服面 $y_i(\tau) = 0$ ，有一个塑性势函数 $g_i(\tau)$ 与之相对应；而由式 (2) 定义的 Koiter 法则告诉我们： $\dot{\varepsilon}_p$ 可表示成 m 个势函数的梯度 $\nabla g_i(\sigma)$ 的非负线性组合， $i = 1, \dots, m$ 。稍后我们还有进一步的解释。

(3) 若取 $g_i = y_i$ ，称流动法则 (2) 为关联流动法则；否则，为非关联流动法则。以 Mohr-Coulomb 材料为例，若将式 (4) 中的内摩擦角 φ 改为剪胀角 ψ ，即可得相应的塑性势函数 $g_i(\tau)$ ，其中， $0 \leq \psi \leq \varphi$ 。

(4) 应力空间中的应力点 σ 按照式 (1) 进行演化，但在任何时候 σ 都不能位于 E_σ 之外，换句话说， $y(\sigma) \leq 0$ 。

式 (2) 中的 λ_i 和 $-y_i$ 构成一对互补关系, 即

$$\lambda_i \geq 0, -y_i \geq 0, \lambda_i(-y_i) = 0 \quad (6)$$

对于 $i=1, \dots, m$, 或者等价的向量形式

$$0 \leq \lambda \perp (-y) \geq 0 \quad (7)$$

式中: λ 为 m 维向量, 其 m 个分量为 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$;

$\perp$ 表示垂直于, 即 $a \perp b$ 等价于 $a^T b = 0$ 。

特别地, 若 $y(\sigma) < 0$, 即应力点 σ 位于弹性区 E_σ 之内, 由互补关系式 (7) 可知 $\lambda = 0$, 再由式 (2) 可知 $\dot{\epsilon}_p = 0$, 即 $\dot{\sigma}$ 与 $\dot{\epsilon}$ 成线弹性关系。

反之, 若应力点 σ 位于弹性区 E_σ 的边界上, 则存在以下两种情况:

(1) σ 仅位于一张屈服面片上, 比如说在第 1 张屈服面片 $y_1(\sigma) = 0$ 上, 而 $y_i(\sigma) < 0, i=2, \dots, m$, 此时点 σ 是屈服面的光滑点。由互补关系式 (6) 可知 $\lambda_1 \geq 0$, 而 $\lambda_i = 0, i=2, \dots, m$, 由 Koiter 法则式 (2) 可知塑性应变率 $\dot{\epsilon}_p$ 方向沿 $\nabla g_1(\sigma)$ 。

(2) σ 位于屈服面片的棱线上, 不妨设 σ 位于第 1、2 张屈服面片的交棱上, 即有 $y_1(\sigma) = y_2(\sigma) = 0$, 而 $y_i(\sigma) < 0, i=3, \dots, m$ 。由互补关系式 (6) 可知 $\lambda_1 \geq 0$ 和 $\lambda_2 \geq 0$, 而 $\lambda_i = 0, i=3, \dots, m$, 由 Koiter 法则式 (2) 可知 $\dot{\epsilon}_p$ 位于两张等势面: $g_1(\sigma) = \text{常数} 1$ 和 $g_2(\sigma) = \text{常数} 2$ 。在点 σ 的法向锥 $V(\sigma)$ 内, $V(\sigma)$ 定义为一切 $\nabla g_1(\sigma)$ 和 $\nabla g_2(\sigma)$ 的非负组合, 也就是说, 对于 $V(\sigma)$ 内的任一向量 ξ , 都存在非负实数 α 和 β , 使得 $\xi = \alpha \nabla g_1(\sigma) + \beta \nabla g_2(\sigma)$ 。

特别地, 对于关联流动法则而言, Koiter 法则式 (2) 和互补关系式 (7) 规定: 塑性应变率 $\dot{\epsilon}_p$ 总是位于 E_σ 在点 σ 的法向锥 $V(\sigma)$ 内。法向锥的定义如下: 若点 σ 位于 E_σ 内部, 规定 $V(\sigma)$ 为零向量; 若点 σ 光滑且落在屈服面 $y_1 = 0$ 上 (比方说), $V(\sigma)$ 中的向量与向量 $\nabla y_1(\sigma)$ 同向; 若点 σ 落在屈服面 $y_2 = 0$ 和 $y_3 = 0$ 的交线上 (比方说), $V(\sigma)$ 中的向量是向量 $\nabla y_2(\sigma)$ 和向量 $\nabla y_3(\sigma)$ 的非负线性组合。图 2 展示了应力点位于 E_σ 内部或边界 3 种不同位置的法向锥: σ_1 位于 E_σ 内部, σ_2 位于 E_σ 边界屈服面 $y_1(\sigma) = 0$ 上, 和 σ_3 位于 E_σ 边界屈服面 $y_2(\sigma) = 0$ 和 $y_3(\sigma) = 0$ 的交线上。

将式 (2) 代入式 (1), 得

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_e - \dot{\sigma}_p \quad (8)$$

这里,

$$\dot{\sigma}_e \triangleq D \dot{\epsilon} \quad (9)$$

$$\dot{\sigma}_p \triangleq D J \dot{\lambda} \quad (10)$$

式中: J 为向量值函数 $g: R^6 \rightarrow R^m$ 的雅可比矩阵, 是 $6 \times m$ 阶的, g 的分量为 m 个塑性势函数 $g_1, \dots, g_m$, 因此

$$J(\sigma) \triangleq [\nabla g_1(\sigma), \dots, \nabla g_m(\sigma)] \quad (11)$$

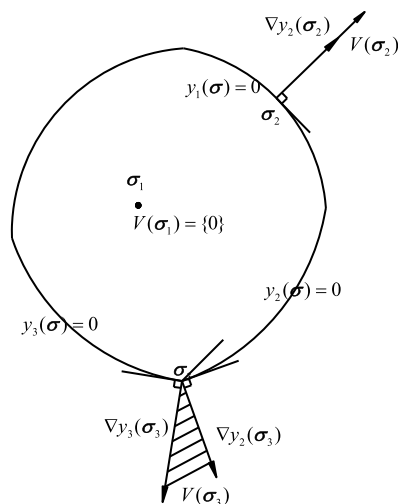


图 2 不同位置的法向锥示意图

Fig.2 Schematic of normal cones at different points

至此, 式 (8) 和式 (7) 或式 (6) 就描述了率形式的理想弹塑性变形, 它们组成了微分-代数方程, 简称 DAE。然而代数方程组 (7) 是互补形式的, 因此, 建议称其为微分-互补方程, 简称 DCE。根据初步检索, 目前尚无这一称谓。因 DAE 中的代数方程通常是光滑的, 所以关于 DAE 的一般解法, 如文献[13], 不能被直接用于求解这里引入的 DCE。

微分方程组 (8) 和互补方程组 (7) 的数目分别为 6 和 m , 刚好等于未知数向量 σ 和 λ 的分量数目, 即应力向量 σ 的 6 个应力分量和塑性乘子向量 λ 的 m 个分量。因此, 一段给定了 σ 的初值 σ_0 , 原则上即可求得对应于有限应变增量 $\Delta \epsilon$ 的 σ 和 λ 。

2.2 数值本构积分

令本步载荷增量所对应的时间区间为 $(0, T]$, 稍后可以看到 T 可以是大于 0 的任意实数, 即所谓伪时长, 应变率 $\dot{\epsilon}$ 与 T 的关系为

$$\dot{\epsilon} = \frac{\Delta \epsilon}{T} \quad (12)$$

塑性本构积分的提法是: 给定应力向量 σ 在 0 时刻的初始值 σ_0 , 和本增量步的应变增量向量为 $\Delta \epsilon$, 求时刻 T 的应力向量 σ_T 。为减少符号的引入, 仍记 σ_T 为 σ 。

对式 (8) 在区间 $(0, T]$ 上采用欧拉向后积分,

得

$$\sigma = \sigma_e - T\sigma_p \quad (13)$$

式中: σ_p 见式 (10), 其中的 J 和 λ 都是对应于时刻 T 的值; σ_e 为弹性试测应力

$$\sigma_e \triangleq \sigma_0 + D\Delta\varepsilon \quad (14)$$

考虑到 $T\sigma_p = DJ(T\lambda)$, 而将式 (7) 中的 λ 用 $T\lambda$ 代替后依然成立, 即

$$0 \leq T\lambda \perp (-y) \geq 0 \quad (15)$$

因此, 从式 (13)、(15) 中我们能够求得的是 $T\lambda$ 而非 λ , 但这不影响 σ 的值。这恰恰反映了率无关材料 (或准静态问题) 下列属性: 应力增量 $\Delta\sigma$ 与时间步长 T 的绝对尺度无关而仅取决于应变增量 $\Delta\varepsilon$ 的大小。据笔者所掌握的文献来看, 显式地引入时间变量 t 及其变化区间 $(0, T]$ 来对率形式的弹塑性本构方程组 (1) 进行积分, 并证明应力增量 $\Delta\sigma$ 的大小与时间步长 T 无关尚属首次。

所以, 为了提法在形式上的紧凑, 我们将 $T\lambda$ 视为 λ , 而将式 (13) 改为

$$\sigma = \sigma_e - \sigma_p \quad (16)$$

σ_p 仍由式 (10) 定义。今后将称式 (16) 为弹塑性应力分解, 它对第 4 节将要引入的有限元平衡方程组的另一形式的确定至关重要。

至此, 我们就得到了 (σ, λ) 应满足的非线性方程组 (16) 和非线性互补关系式 (7), 它们即组成了将在下一小节定义的混合互补问题。

2.3 混合互补问题及其 GSPC 算法

综上所述, 可得塑性本构积分所定义的混合互补问题为: 给定应变增量向量 $\Delta\varepsilon$, 求 $(\sigma, \lambda) \in R^6 \times R_+^m$, 使得

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \lambda \perp f_I(\sigma, \lambda) \geq 0 \\ f_E(\sigma, \lambda) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

简记为 $\text{MiCP}(f_I, f_E)$ 。这里, R_+^m 表示 m 维向量空间的第一卦限, R_+^m 中的任意向量的所有 m 个分量都非负; $f_I: R^6 \times R_+^m \rightarrow R^m$, 定义为

$$f_I(\sigma, \lambda) \triangleq -y(\sigma) \quad (18)$$

$f_E: R^6 \times R_+^m \rightarrow R^6$ 定义为

$$f_E(\sigma, \lambda) \triangleq \sigma + \sigma_p - \sigma_e \quad (19)$$

假定 $\text{MiCP}(f_I, f_E)$ 的解存在, 在文献[14]中:

- ①证明了对于关联流动, $\text{MiCP}(f_I, f_E)$ 的解唯一;
- ②对于非关联流动, 给出了 $\text{MiCP}(f_I, f_E)$ 有唯一解的充分性条件;
- ③即便对于非关联流动, 对应于截尾的 Mohr-Coulomb 屈服面, $\text{MiCP}(f_I, f_E)$ 的解也是唯一的。

利用 $\text{MiCP}(f_I, f_E)$ 是有限维变分不等式的特例这一事实, 通过引入高斯-赛德尔迭代技术, 我们对解有限维变分不等式的投影-收缩算法^[15]进行了改造, 并称改造后的算法为 GSPC。GSPC 具有如下特性:

(1) 对于任意大小的应变增量 $\Delta\varepsilon$ 都收敛, 而返回-映射算法只在 $\Delta\varepsilon$ 充分小时才可能收敛。

(2) 不必测试弹性试测应力 σ_e 是否位于弹性区 E_σ 之外, 不必求弹性路径 $\sigma_0 - \sigma_e$ 与屈服面的交点, 不必猜哪些屈服面片是活动的, 不必计算势函数 g_i 的 Hesse 矩阵。

(3) 计算效率高于返回-映射算法, 而且这一优势对于非光滑屈服面尤为突出。

因不涉及到试验-误差过程, GSPC 的编程甚至比高斯消元法都要简单。为完整性起见, 我们在附录中列出了 GSPC 算法的伪代码。

采用返回-映射算法求解 (σ, λ) 时, 若弹性试测应力 σ_e 位于 E_σ 之外, 通常需求得弹性路径 $\sigma_0 - \sigma_e$ 与屈服面的交点 σ_i , 如图 3 所示, 这通常也要花费一些计算量。

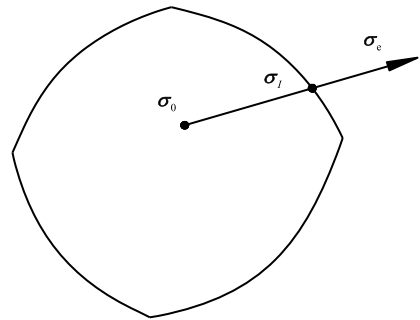


图3 弹性路径 $\sigma_0 - \sigma_e$ 与屈服面的交点 σ_i

Fig.3 Intersection σ_i of elastic path $\sigma_0 - \sigma_e$ and the yielding surface

即便对于光滑屈服面, 如 Mises 屈服面, 返回-映射算法为确保算法的收敛和精度, 也必须将应变增量 $\Delta\varepsilon$ 取得足够小。

返回-映射算法在处理非光滑屈服面时, 需假定活动的屈服面片。假定在当前迭代中第 4 和第 5 张屈服面是活动屈服面, 那么返回-映射算法需求解如下关于 σ 、 λ_4 和 λ_5 的非线性方程组问题:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_e - D[\lambda_4 \nabla g_4(\sigma) + \lambda_5 \nabla g_5(\sigma)] \\ f_4(\sigma) &= 0 \\ f_5(\sigma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

上述问题与混合互补问题式 (17) 完全等价, 因为除了 λ_4 和 λ_5 之外, 其他 λ_i 都为 0。

在迭代收敛时, 若 λ_4 和 λ_5 都非负, 就说明关于第 4 和第 5 张屈服面是活动的这一猜测正确; 否则, 需更新活动屈服面假定并启动新的迭代^[11]。

若采用牛顿法求解方程组 (20), 还要计算塑性势函数 g_4 和 g_5 的 Hesse 矩阵, 即

$$\left(\frac{\partial^2 g_4}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right)_{\tau=\sigma} \text{ 和 } \left(\frac{\partial^2 g_5}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right)_{\tau=\sigma} \quad (21)$$

这里下标 i 和 j 取值为 1~6, 代表 6 个分量 τ_x 、 τ_y 、

τ_z 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 和 τ_{xy} 中的任意一个, 如: $\frac{\partial^2 g_4}{\partial \tau_2 \partial \tau_4} =$

$\frac{\partial^2 g_4}{\partial \tau_y \partial \tau_{yz}}$ 等。

显然, 围成弹性区 E_σ 的面片数越多, 返回-映射算法越复杂。以截尾的 Mohr-Coulomb 屈服面为例, 可能最多会有 3 张活动的屈服面片。而且, 返回-映射算法还无法确保算法的收敛性。所幸的是, GSPC 完全解决了这些问题。

3 主应力对应力分量的偏导数

对于很多屈服面, 屈服函数或塑性势函数在三维主应力空间中的表达式远比它们在六维应力空间中的表达式简单和直观, 也比用应力不变量和 Lode 角简单。根据 Koiter 流动法则 (式 (2)) 和求偏导数的链式法则, 在计算塑性势函数 g 对应力分量 σ_{ij} 的偏导数时, 需要计算主应力对应力分量的偏导数, 即

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (22)$$

式中: σ_k , $k=1, 2, 3$, 表示 3 个主应力。然而, 在固体力学的现有文献中, 尚未发现 $\frac{\partial \sigma_k}{\partial \sigma_{ij}}$ 的计算公式和算法。这里, 我们来推导这一计算公式。

用 S 表示应力张量的 6 个分量所表示的 3×3 矩阵

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (23)$$

因为 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 所以 S 是对称的。

进一步记 σ 表示 3 个主应力中的任意一个, l 是相应的单位主方向。那么,

$$Sl = \sigma l \quad (24)$$

对上式两边关于 6 个应力分量中的任意一个求偏导, 得

$$S'l + Sl' = \sigma'l + \sigma l' \quad (25)$$

这里, S' 表示 S 对这一应力分量的偏导数, 例如 S

对 σ_y 的偏导数为 $S' = \frac{\partial S}{\partial \sigma_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, S 对 τ_{xy} 的

偏导数为 $S' = \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 等。

式 (25) 两端左乘 l^T , 得

$$l^T S'l + l^T Sl' = \sigma'l^T l + \sigma l^T l' \quad (26)$$

由 $l^T l = 1$ 并两边求偏导, 可得 $l^T l' = 0$ 。同时, 因为 $S = S^T$ 以及式 (24), 所以

$$l^T S'l = (Sl)^T l' = \sigma l^T l' = 0 \quad (27)$$

最终, 式 (25) 可简化成

$$\sigma' = l^T S'l \quad (28)$$

具体地, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_x} &= l^T \frac{\partial S}{\partial \sigma_x} l = l_x^2, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_y} = l_y^2, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_z} = l_z^2, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_{xy}} &= l^T \frac{\partial S}{\partial \tau_{xy}} l = 2l_x l_y, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_{yz}} = 2l_y l_z, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_{zx}} = 2l_z l_x \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

其中, $(l_x, l_y, l_z) = l^T$ 。总之,

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial \sigma_{ij}} = (2 - \delta_{ij}) l_i^k l_j^k \quad (30)$$

式中: $i, j, k=1, 2, 3$; l^k 为对应于第 k 主应力的单位主方向; δ_{ij} 为 Kroneke-Delta 符号; 这里对重复指标不求和。

需要指出的是: 杨光华等^[16]利用应力张量在主应力方向所构建的坐标系中的分量与用户坐标系中的分量之间的转换式, 也导出了与式 (29) 完全一致的结果 (这是笔者在脱稿前才获悉的)。因推导方法不一样, 所以笔者仍保留了这一节。

4 位移控制法

由理想弹塑性材料组成的地基或边坡在达到极限平衡状态时, 地基或边坡就会因为临界滑面的贯通而变成一个机构, 即在外力保持不变的前提下, 部分地基或坡体会沿临界滑面发生滑动。此时, 切线刚度矩阵将丧失正定性而亏一个秩^[17], 致使基于载荷控制法 (LCM) 的牛顿法失效。其实, 即便尚未达到极限平衡状态, LCM 也往往无法收敛。

为了将离散系统代入极限平衡状态, 我们需要对有限元的平衡方程组采用位移控制法 (DCM)。但现有的 DCM 程序结构与主流的 LCM 程序结构往往相差很大, 因此, DCM 很少被程序员们所采用。

本节我们为理想塑性变形的有限元法设计一个求解器, 该求解器的 DCM 和 LCM 有非常相似的程序结构, 二者能非常方便地相互切换。

4.1 有限元平衡方程组的另一形式

一旦问题定义域 Ω 被离散成有限元系统, 我们总能建立每个载荷步末了时刻的平衡方程组:

$$\sum_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{q} + \mathbf{q}_0 \quad (31)$$

式中: $\mathbf{q}_0$ 为增量之初的等效节点力向量; $\mathbf{q}$ 为本载荷步的等效节点力增量向量, 即 $\mathbf{q} + \mathbf{q}_0$ 为本载荷步末了时刻的载荷水平; Σ 代表装配意义下的求和; Ω^e 代表网格中的一个典型单元; $\boldsymbol{\sigma}$ 为本步载荷增量 $\mathbf{q}$ 结束后的总应力向量; $\mathbf{B}$ 为 $6 \times n_e$ 矩阵 (n_e 为 $\mathbf{p}_e$ 的维数), 它将 Ω^e 单元增量位移自由度向量 $\mathbf{p}_e$ 变换成应变增量向量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, 即

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{p}_e \quad (32)$$

相关有限元文献^[12]中, 有关于如何计算 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{q}_0$ 的论述。

但是, 一步将载荷向量 $\mathbf{q} + \mathbf{q}_0$ 施加于有限元系统中可能难以收敛。实际求解时, 我们是通过引入不大于 1 的载荷乘子 ρ , 来解对应于 $\rho \mathbf{q} + \mathbf{q}_0$ 的平衡方程组:

$$\sum_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \rho \mathbf{q} + \mathbf{q}_0 \quad (33)$$

并在取得收敛后更新位移增量、应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 以及 $\mathbf{q}_0$, 即令 $\mathbf{q}_0 := \rho \mathbf{q} + \mathbf{q}_0$ 。然后, 继续上一过程, 直到 $\sum \rho$ 的值等于 1。这就是通常的基于常刚度的 LCM。如果 $\sum \rho$ 的值无法达到 1, 那么 $\sum \rho$ 就是 LCM 能够求得的对应于荷载向量 $\mathbf{q}$ 的极限载荷乘子。显然, 一般情况下, LCM 在尚未达到极限状态时就无法收敛, 因此, $\sum \rho$ 低于真实的极限载荷乘子。

假设因 $\mathbf{q}$ 引起的位移自由度向量为 $\mathbf{p}$ (增量),

$\mathbf{p} \in R^n$ 。若以位移为基本未知量, 那么方程组 (33) 是关于 $\mathbf{p}$ 的非线性方程组, 其中的 $\boldsymbol{\sigma}$ 非线性地依赖于 $\mathbf{p}$ 。求解方程组 (33) 的 LCM 通常采用的是牛顿法, 这将使得 LCM 的程序结构迥异于 DCM。为便于由 LCM 切换至 DCM, 我们建议采用如下效率更高的方式。

将式 (16)、(14)、(10)、(32) 依次代入式 (33), 得关于向量 $\mathbf{p}$ 的非线性方程组:

$$\mathbf{K} \mathbf{p} = \rho \mathbf{q} + \mathbf{r} \quad (34)$$

式中: $\mathbf{K}$ 为弹性刚度矩阵,

$$\mathbf{K} \triangleq \sum_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (35)$$

$\mathbf{K}$ 在求解方程组 (34) 的迭代过程中保持不变; 向量 $\mathbf{r}$ 非线性地依赖于 $\mathbf{p}$, 定义为

$$\mathbf{r} \triangleq \bar{\mathbf{q}}_0 + \sum_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_p d\Omega \quad (36)$$

$\boldsymbol{\sigma}_p$ 的定义见式 (10); 但 $\bar{\mathbf{q}}_0$ 在迭代过程中保持不变, 定义为

$$\bar{\mathbf{q}}_0 \triangleq \mathbf{q}_0 - \sum_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega \quad (37)$$

LCM 视 ρ 已知, 方程组 (34) 中的方程数和未知数都为 n , 每一个方程代表 R^n 中的一张曲面, 该曲面以 $\mathbf{p}$ 的 n 个分量为坐标。解方程组 (34) 实际上就是求这 n 张曲面的交点, 该交点的坐标向量即为 $\mathbf{p}$ 。若系统接近极限平衡状态, LCM 是无法收敛的, 这时需借助于 DCM。下面我们就给出 DCM 的求解思路。

若将 ρ 也视为未知数, 则方程组 (34) 含 n 个方程、 $n+1$ 个未知数 $(\mathbf{p}, \rho)$, 它们定义了 R^{n+1} 中的一条曲线 C —平衡路径, 平衡路径 C 是方程组 (34) 中的 n 张曲面的交线。LCM 相当于用一系列 $\rho = \text{常数}$ 的超平面来截取平衡路径 C 。因此, 仅当平衡路径能用 ρ 作参数时, 即当平衡路径 C 与 $\rho = \text{常数}$ 的超平面有交点时, 才能用 $\rho = \text{常数}$ 的超平面来截取平衡路径 C , 即用 LCM 来追踪曲线 C 。否则, 就会因为 $\rho = \text{常数}$ 的超平面与平衡路径 C 无交点, 致使 LCM 无法收敛。

为了继续追踪平衡路径 C , 我们可以令 $\mathbf{p}$ 中的某一分量 p_i 为已知而 ρ 未知来求解方程组 (34), 即通过令一系列 $p_i = \text{常数}$ 的超平面来截取平衡路径 C , 这就是 DCM。

我们将采用简单迭代法来求解方程组 (34), 期间视向量 $\mathbf{r}$ 为依赖于 $\mathbf{p}$ 的前一个迭代值 $\mathbf{p}^k$ 的已

知向量, 如此便可得方程组 (34) 的迭代格式:

$$\mathbf{K}\mathbf{p}^{k+1} = \rho^{k+1}\mathbf{q} + \mathbf{r}^k \quad (38)$$

上标 k 和 $k+1$ 代表迭代序号。这样, 无论是关联塑性还是非关联塑性, 系数矩阵 $\mathbf{K}$ 总是对称正定的, 且在迭代过程中保持不变。我们知道, 对于非关联塑性, 切线刚度矩阵是非对称的。故上述求解方式至少在存贮效率方面远优于切线刚度法。此外, 在接近极限状态时, 切线刚度矩阵的条件数越来越大, 使得基于切线刚度的 LCM 所对应线性方程组的数值性态越来越差, 而式 (38) 迭代格式则完全克服了这一问题, 因为弹性矩阵 $\mathbf{K}$ 的数值性态优于任何切线刚度矩阵。因此, 这里所建议的 DCM 的数值性态也远优于基于切线刚度矩阵的 LCM。

用 $\mathbf{K}^{-1}$ 左乘方程组 (38), 得

$$\mathbf{p}^{k+1} = \rho^{k+1}\mathbf{p}_q + \mathbf{p}_r^k \quad (39)$$

式中: $\mathbf{p}_q$ 为对应于本步的增量载荷向量 $\mathbf{q}$ 的弹性位移向量, 即 $\mathbf{p}_q$ 是方程组 (40) 的解, $\mathbf{p}_q$ 在迭代过程中也保持不变。

$$\mathbf{K}\mathbf{p}_q = \mathbf{q} \quad (40)$$

$\mathbf{p}_r^k$ 为对应于载荷向量 $\mathbf{r}^k$ 的弹性位移向量, 即 $\mathbf{p}_r^k$ 是方程组 (41) 的解, $\mathbf{p}_r^k$ 依赖于 σ_p^k , 而 σ_p^k 依赖于 $\mathbf{p}^k$ 。

$$\mathbf{K}\mathbf{p}_r^k = \mathbf{r}^k \quad (41)$$

4.2 LCM

若对式 (39) 迭代格式采用 LCM, 可始终令 $\rho^{k+1} = \rho = \text{常数}$, 来求对应于荷载增量 $\rho\mathbf{q}$ 的位移增量 $\mathbf{p}$ 。但 LCM 仅在系统尚未达到极限平衡状态时才有效。

4.3 DCM

若对式 (39) 迭代格式采用 DCM, 令 ρ^{k+1} 未知, 而 $\mathbf{p}^{k+1}$ 的第 i 个分量 p_i^{k+1} 已知, 即令:

$$p_i^{k+1} = \bar{p}_i \quad (42)$$

考虑到系统在相同载荷作用下产生的塑性变形与弹性变形的趋势是一致的, 可以将 $\bar{p}_i$ 指定为向量 $\mathbf{p}_q$ 的分量中绝对值最大的那个分量, $\mathbf{p}_q$ 是由本步载荷增量 $\mathbf{q}$ 所引起的弹性位移向量, 由式 (40) 给出。

将式 (42) 代入式 (39) 的第 i 个方程并从中解得 ρ^{k+1} :

$$\rho^{k+1} = \frac{\bar{p}_i - p_{ri}^k}{p_{qi}} \quad (43)$$

式中: p_{qi} 和 p_{ri}^k 分别为向量 $\mathbf{p}_q$ (见式 (40)) 和 $\mathbf{p}_r^k$ (见式 (41)) 的第 i 个分量。

最后, 将 ρ^{k+1} 的值代回式 (39), 即可求得 $\mathbf{p}^{k+1}$ 。

在每一迭代步后, 若满足

$$\|\mathbf{p}^{k+1} - \mathbf{p}^k\|_\infty < e_p \|\mathbf{p}_q\|_\infty \quad (44)$$

即可终止迭代, 并更新系统的位移和应力, 即将 $\mathbf{p}^{k+1}$ 叠加到总的节点位移向量中, 将 σ^{k+1} 赋给 σ_0 , 等等。这里, e_p 为位移的相对容差。

至于 $\mathbf{p}$ 的迭代初值 $\mathbf{p}^0$, 可取其为本步载荷增量 $\mathbf{q}$ 所引起的弹性位移向量 $\mathbf{p}_q$, 即

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}_q \quad (45)$$

不同于 LCM, DCM 可应用于整个变形阶段。在系统接近或达到极限平衡状态时, DCM 的求解效率反而会提高, 而在极限状态时, 其收敛性表现非常惊人, 迭代两三次便可收敛。

由以上推导可以看出, DCM 与 LCM 可以有非常相似的程序结构。

4.4 全过程平衡路径的追踪算法 FEPT

计算地基承载力和边坡安全系数时, 需将离散系统带入极限平衡状态, 即需要追踪全过程平衡路径, 此时, 可通过连续调用 DCM 来达到这一目的。以下称这一算法为 FEPT。

设 ρ_i 为第 i 次调用 DCM 后取得的载荷乘子。显然, 当 ρ_i 趋于 0 时, 系统处于极限平衡状态, 此时

$$\rho_L = \sum_i \rho_i \quad (46)$$

就是相对于载荷增量 $\mathbf{q}$ 的极限载荷乘子。

记以 $(\mathbf{p}, \rho)$ 为坐标的 R^{n+1} 空间中的平衡路径 C 的参数方程为 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$, $\rho = \rho(s)$ 。其中 s 为曲线 C 的参数。一般情况下, 我们不可能得到曲线 C 的解析表达式, 然而, 通过连续调用 DCM, 我们能得到该平衡路径上的一系列离散点 $(\mathbf{p}_k, \rho_k)$, $k=1, 2, \dots$,

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}(s_k), \rho_k = \rho(s_k) \quad (47)$$

若每次调用 DCM 都采用等弹性步长 $\bar{p}_i$, 则参数 $s_k = k\bar{p}_i$ 。

5 在边坡稳定性分析中的应用

当失稳模式比较复杂时, 基于变形分析的有限元法在许多方面都优于经典的极限平衡法和极限分析法。例如, 当边坡的临界滑面不能简化成直线、

圆弧或对数螺旋线时，传统的极限分析法就显得有些笨拙。但是，只要将边坡从自然状态通过降强的方式带入极限平衡状态，临界滑面就能被自动识别出来。正因如此，有限元-强度折减法在过去几十年内得到很多学者的倡导^[18-28]，甚至被一些大型软件公司做成了商用软件。

在边坡接近极限平衡状态时，坡顶往往会出现拉裂缝。据报道^[23]，稳定性分析中若忽略拉裂缝的存在，会高估边坡稳定系数达 70%。Duncan 等^[24]建议边坡稳定性分析时，如果遇到拉应力，应该设置拉裂缝，或者采用能同时考虑拉剪和压剪破坏的屈服面。

在传统的极限平衡法中，坡顶拉裂缝的位置和深度是通过试验-误差解法而得到的，期间引入了许多人为假定^[25]。

在极限分析的上限法中，拉裂缝被视为临界滑面的一部分，其余部分是用对数螺旋线来表示的，通过极小化边坡的极限高度来得到临界滑面。尽管上限法仅局限于简单的失稳模式，但自从 Michalowski^[26]以来，上限法似乎又成了带拉裂缝的边坡稳定性分析的一个小小热点，见文献^[27-29]。

原则上，利用截尾的 Mohr-Coulomb 屈服面和有限元-强度折减法可自动捕获坡顶拉裂缝。但实际情况并非如此。迄今为止，强度折减-有限元边坡稳定性分析都局限于不带拉应力截断的、类 Mohr-Coulomb 屈服面，特别是 Drucker-Prager 屈服面。其原因就在于对屈服面做无拉截断后会在屈服面上留下非光滑点，即便屈服面本身是光滑的，如 Drucker-Prager 屈服面。对于非光滑屈服面的塑性本构积分既然已经不存在任何问题了，那么就可以利用强度折减-有限元法来捕捉坡顶拉裂缝的位置了。

现在我们能体会到将系统的平衡方程组写成式 (33) 的好处之一是能够考虑不同的应力路径对于边坡安全性的影响。

设边坡初始初应力场为 σ_0 ，对应于 σ_0 的等效节点力为

$$q_0 = \sum_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} B^T \sigma_0 d\Omega \quad (48)$$

边坡增量荷载所对应的等效节点力为 q ， q 可能对应于拟静力法的地震荷载，也可能是边坡开挖所产生的开挖力。

由 4.4 节的算法 FEPT，我们可以求得对应于 q 的极限荷载乘子 ρ_L 。不同的边坡处置方式，将会产生不同的 q 及其 ρ_L 。 ρ_L 越大，说明相应的处置方案越安全。

5.1 安全系数的计算

地基承载力问题和边坡稳定性问题同属于经典的强度问题。但地基承载力问题是维持土体强度和变形参数不变，通过超载来将地基带入极限平衡状态的，是用超载系数 ρ_L 来衡量地基的超载能力的， ρ_L 可通过直接调用算法 FEPT 而得到。而边坡稳定性问题是维持外载不变，通过降强来将边坡带入极限平衡状态的，是用安全系数 F 来衡量边坡安全性的，因此，一般情况下直接调用 FEPT 是无法获知 F 的。

以 Mohr-Coulomb 准则为例。设 c 和 φ 分别是土体的黏聚力和内摩擦角。边坡稳定性分析需要寻找强度折减系数 Z ，使得当土体的 c 和 φ 分别代之以 c_z 和 φ_z 后边坡处于极限平衡状态，此时就令边坡的安全系数 $F = Z$ 。这里，

$$c_z = \frac{c}{Z}, \quad \tan \varphi_z = \frac{\tan \varphi}{Z} \quad (49)$$

在对 c 和 φ 折减的同时，建议将泊松比 ν 调整为 ν_z ，使其满足 $\varphi - \nu$ 不等式：

$$\sin \varphi_z \geq 1 - 2\nu_z \quad (50)$$

调整的策略极为简单。达索已经在其开发的基于有限元-强度折减法的软件产品嵌入了^[30]建议的自动调整过程。

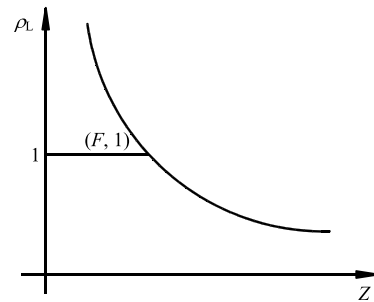


图4 强度折减系数 Z 与极限荷载乘子 ρ_L 之间的关系
Fig.4 Relationship between strength reduction factor Z and limit load multiplier ρ_L

对于给定的强度折减系数 Z ，由 4.4 节中的算法 FEPT 可以给出相应于荷载增量 q 的极限荷载乘子 $\rho_L(Z)$ 。显然， $\rho_L(Z)$ 是 Z 的单调下降函数，而安全系数 F 是一元方程 $\rho_L(Z) = 1$ 的单根，如图 4 所示。利用这一事实，可以设计出求解安全系数的割线法或二分法；也由此可知：满足协调性条件和静力许可条件（即平衡条件+屈服准则）的边坡安全系数是唯一的。去掉协调性条件后的安全系数是不唯一的，例如 Morgenstern-Price 法和严格 Bishop 法都仅满足平衡条件，但一般情况下这两种方法所

算得的安全系数并不相等。

5.2 坡顶拉裂缝的定位

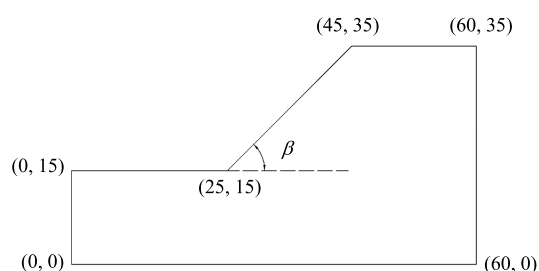
记极限状态下由增量载荷 q 引起的第一主应变为 ε_1 ，由 $\varepsilon_1 \geq 0$ 可以定义出坡内的受拉区。坡顶总有一部分是受拉区，记为 Ω_T ，拉裂缝的位置应该是 ε_1 最大的位置。本文是采用如下方法确定拉裂缝的：在所有单元中，找出 ε_1 最大的高斯点 G ；过 G 点做垂线，垂线在坡顶受拉区 Ω_T 内的这部分就定义为坡顶拉裂缝。

6 算例

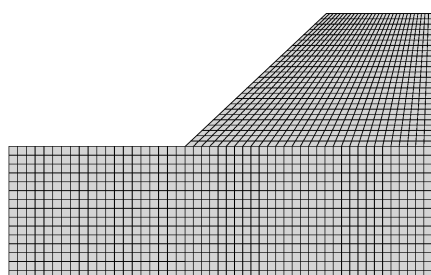
本文所建议的塑性本构积分算法 GSPC 的原理和说明其功效的诸多算例参见文献[14]。这里仅展示本文所建议的方法在边坡稳定性分析、特别是在定位坡顶拉裂缝时的应用，更多复杂的边坡实例可参见文献[9]。

6.1 应用于均质土坡

图 5(a)显示的是一均质土坡截面，其中坡高为 20 m，坡角 β 为 45° 。土体重度 $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ ，黏聚力 $c = 42 \text{ kPa}$ ，摩擦角 $\varphi = 30^\circ$ ，杨氏模量 $E = 30 \text{ MPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。图 5(b)是相应的有限元网格，其中左右两侧边界为光滑支撑，而底边在水平和垂直方向上皆固支，所有单元为四节点等参元，单元积分采用 2×2 高斯积分，控制 DCM 截断的容差 $e_p = 1\%$ ，见式 (44)。该算例是由 Cheng 等^[31]设计的。



(a) 几何模型 (单位: m)



(b) 网格布置

图 5 均匀土质边坡模型和网格
Fig.5 Geometric model and mesh configuration of a homogeneous soil slope

记 F_{MC}^s 和 F_{Cut}^s 分别表示由完整的 Mohr-Coulomb 屈服面和截尾的 Mohr-Coulomb 屈服面所产生的安全系数。

对于本例， $F_{MC}^s = 1.537$ ， $F_{Cut}^s = 1.512$ ，表明即便对 Mohr-Coulomb 屈服面不做拉应力截断，安全系数也仅被高估 1.65%，完全处于工程可接受的误差范围。

图 6 显示的是边坡在达到极限平衡状态时的当量塑性应变 $\bar{\varepsilon}_p$ ，定义为

$$\bar{\varepsilon}_p = \sum \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \varepsilon_p^T \Delta \varepsilon_p} \quad (51)$$

这里，求和是针对所有的载荷增量步，而 $\Delta \varepsilon_p$ 为增量塑性应变矢量。

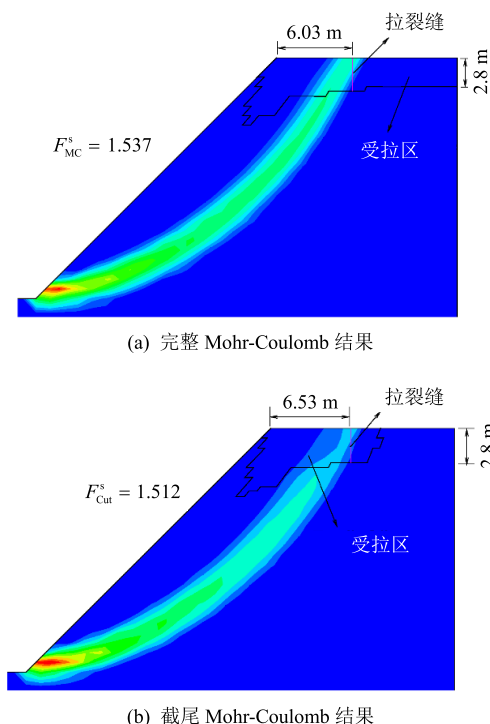


图 6 完整和截尾 Mohr-Coulomb 结果对比 (1 500 个单元)
Fig.6 Comparison of failure mechanism of intact and cut-off Mohr-Coulomb yield surface (1 500 elements)

图 6 也显示了极限状态下坡顶受拉区 Ω_T 。图 6(a)表明，忽略受拉失效会严重夸大坡顶受拉区，致使 Ω_T 扩展到模型边界。进一步扩大模型范围也无济于事， Ω_T 都将延伸至模型边界。有过强度折减-有限元边坡稳定性分析的研究者都熟知这一反常现象，但却经常将其解释为边界效应。图 6(b)表明，当采用截尾的 Mohr-Coulomb 屈服面后的受拉区 Ω_T 要小得多，也似乎更加合理。图 6 还显示了拉裂缝的位置。拉裂缝位置和深度的确定见 5.2 节。

图 7 显示了网格密度对计算结果的影响。随着

网格的加密:

(1) 极限平衡状态下的失效区变得越来越窄。

(2) 安全系数越来越小。这是因为我们所采用的单元都是位移型协调元, 而位移型协调元总是从下方逼近问题的真解, 即: 随着网格的加密, 位移

总体上变得越来越大。同样载荷水平下较大的位移场所产生的危险性就更大, 因而其安全系数就越小。

(3) 拉裂缝的位置和深度先于失效区而收敛。例如, 在网格密度为 1 500 时, 拉裂缝的位置和深度已经收敛, 而失效区还在不断的变化。

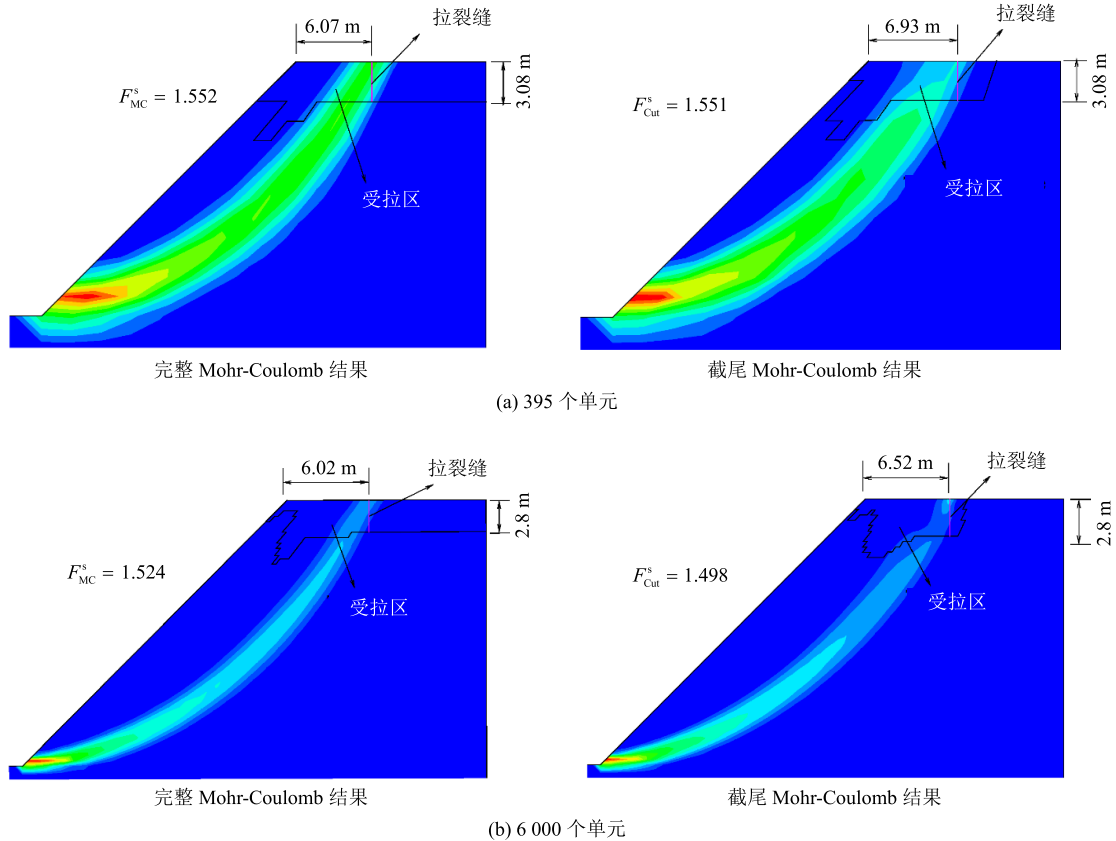


图7 单元密度的影响

Fig.7 Influence of mesh density

极限状态下坡顶拉裂缝的位置和深度估计在理论上尚未获得完全的解决, 已经有了许多关于这一问题的研究。例如, 针对均质无水土坡, Michalowski^[26]建议了一个拉裂缝深度估算式为

$$h = \frac{\kappa c_m}{\gamma} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_m}{2} \right) \quad (51)$$

式中: κ 在 2~3.83 之间变化; c_m 和 φ_m 为调动起来的强度参数, 或者说是使边坡处于极限平衡状态下的强度参数, 即

$$c_m = \frac{c}{F_s}, \quad \tan \varphi_m = \frac{\tan \varphi}{F_s} \quad (52)$$

将 $F_s = F_{Cut}^s = 1.512$ 代入式 (52), 再将求得的 c_m 、 φ_m 代入式 (51), 可估算出 h 的区间为 (3.23 m, 6.18 m)。笔者认为, 这一区间也太大了!

采用本文建议的方法所估算的拉裂缝的深度为 2.80 m, 甚至低于由式 (51) 所估算的下限。下

面我们将论证式 (51) 夸大了拉裂缝的深度。

6.2 边坡角度的影响

采用与上例完全一致的力学参数, 但令坡角 β 分别为 50°、60°、70°、80° 和 90°。表 1 列出的计算结果表明, 当坡角 β 小于 70° 时, 完整 Mohr-Coulomb 屈服面和截尾 Mohr-Coulomb 屈服面所产生的安全系数相差不大; 但当 β 超过 80° 后, 两者的差别迅速增加, 并在 $\beta = 90^\circ$ 时相差达 20%。因此, 在进行深基坑稳定性分析时必须在考虑无拉应力截断的条件下进行。

取 $\beta = 70^\circ$ 时的 $F_s = F_{Cut}^s = 1.06$, 由式 (51) 所估算的拉裂缝的深度区间为 (17.02 m, 32.60 m)。但边坡的高度仅为 20 m, 因此, Michalowski 估算方法, 即式 (51), 明显高估了拉裂缝的深度。由本文方法所估算的拉裂缝深度为 4.8 m, 似乎更贴近实际。边坡在极限状态下的失效区和受拉区以及拉裂缝如图 8 所示。

表 1 不同坡角安全系数对比
Table 1 Outcomes of different slope angles

坡角 / $^{\circ}$	F_{MC}^s	F_{Cut}^s	相差 /%
45	1.512	1.537	1.63
50	1.386	1.412	1.84
60	1.180	1.218	3.12
70	1.012	1.060	4.53
80	0.851	0.928	8.30
90	0.652	0.814	19.9

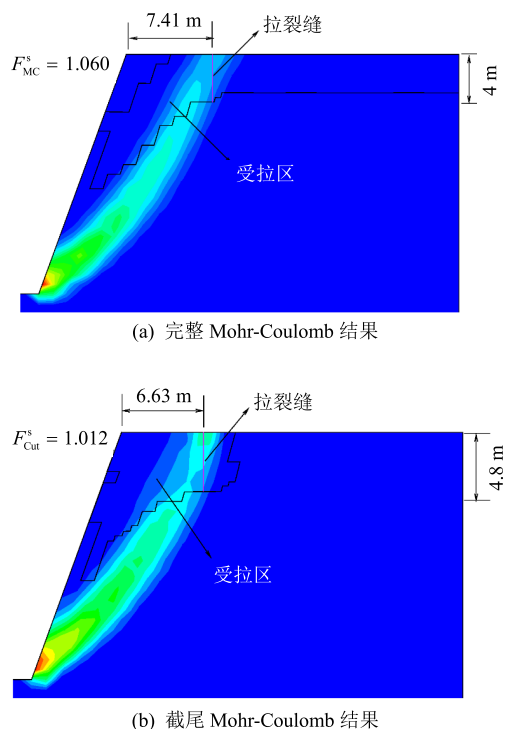


图 8 完整和截尾 Mohr-Coulomb 失效机制对比($\beta=70^{\circ}$)
Fig.8 Comparison of failure mechanism of intact and cut-off Mohr-Coulomb yield surface ($\beta=70^{\circ}$)

7 结 论

基于理想弹塑性假定, 我们得出如下结论:

(1) 率形式的应力-应变关系可以归结为一个微分-互补方程, 简称 DCE。

(2) 若采用关联流动法则, 则 DCE 的解存在且唯一; 若流动法则为非关联但采用的是截尾的 Mohr-Coulomb 屈服面, 则 DCE 的解也存在唯一。

(3) 当满足条件 (2) 时, 基于高斯-赛德尔迭代的投影-收缩算法 GSPC 对于任意大小的应变增量都收敛, 与屈服面是否光滑无关。且 GSPC 算法的鲁棒性和求解效率优于返回-映射算法。

(4) 利用弹塑性应力分解即式 (16) 设计的平衡方程组求解器能使载荷控制法 (LCM) 和位移控制法 (DCM) 有相似的程序结构, 其中, DCM 能高效稳定地将离散系统带入极限平衡状态。

(5) 满足变形协调条件和静力许可条件的边坡安全系数是唯一的。

(6) 坡顶拉裂缝的 Michalowski 估计高估了拉裂缝的深度。

此外, 主应力对应力分量偏导数的计算公式简化了本构积分。

值得指出的是本文关于塑性本构积分的理论和算法仅适用于理想弹塑性, 目前正在研究有硬化或软化行为的塑性本构积分, 预计很快就会有相应的成果汇报。

参 考 文 献

- [1] CLAUSEN J, DAMKILDE L, ANDERSEN L. Efficient return algorithms for associated plasticity with multiple yield planes[J]. *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 2006, 66(6): 1036-1059.
- [2] SLOAN S W, ABBO A J, SHENG D. Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control[J]. *Engineering Computations*, 2001, 18(1-2): 121-194.
- [3] 郑颖人, 孔亮, 阿比尔的. 强度理论与数值极限分析[M]. 北京: 科学出版社, 2020.
ZHENG Ying-ren, KONG Liang, ABI Erdi. Strength theory and numerical limit analysis[M]. Beijing: Science Press, 2020.
- [4] ZIENKIEWICZ O C, PANDE G N. Some useful forms of isotropic yield surface for soil and rock mechanics[M]// *Finite Elements in Geomechanics*, Chapter 5. London: Wiley, 1977: 179-198.
- [5] MENETREY P, WILLAM K. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization[J]. *ACI Structural Journal*, 1995, 92(3): 311-318.
- [6] ABBO A J, LYAMIN A V, SLOAN S W, et al. A C2 continuous approximation to the Mohr-Coulomb yield surface[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, 48: 3001-3010.
- [7] WILKINS A, SPENCER B W, JAIN A, et al. A method for smoothing multiple yield functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, 121: 434-449.
- [8] OWEN D R J, HINTON E. Finite elements in plasticity: theory and practice[J]. *Applied Ocean Research*, 1981, 3(3): 149.
- [9] 张谭. 带非光滑屈服面的塑性本构积分及其在强度问题中的应用[D]. 北京: 北京工业大学, 2020.

- ZHANG Tan. Constitutive integration of plasticity with non-smooth yield surfaces and applications to strength problems[D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2020.
- [10] DE SOUZA NETO E A, PERIĆ D, OWEN D R J. Computational methods for plasticity: theory and applications[M]. Chichester: Wiley, 2008.
- [11] SIMO J C, HUGHES T J R. Computational inelasticity[M]. New York: Springer, 1998.
- [12] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L. The finite element method: solid mechanics[M]. 2nd ed. London, UK: McGraw-Hill Book Company, 1991.
- [13] ASCHER U M, PETZOLD L R. Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations[M]. Philadelphia: SIAM, 1998.
- [14] ZHENG H, ZHANG T, WANG Q S. The mixed complementarity problem arising from non-associative plasticity with non-smooth yield surfaces[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2020, 361: 112756.
- [15] HE B S. A class of projection and contraction methods for monotone variational inequalities[J]. **Applied Mathematics and Optimization**, 1997, 35: 69-76.
- [16] 杨光华, 李广信, 介于新. 土的本构模型的广义位势理论及其应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007.
- YANG Guang-hua, LI Guang-xin, JIE Yu-xin. Generalized potential theory for constitution models of soils with applications[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2017.
- [17] ZHENG H, LIU D F, LI C G. On the assessment of failure in slope stability analysis by the finite element method[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 2008, 41: 629-639.
- [18] MATSUI T, SAN K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique[J]. **Soils and Foundations**, 1992, 32: 59-70.
- [19] UGAI K, LESHCHINSKY D. Three-dimensional limit equilibrium and finite element analyses: a comparison of results[J]. **Soils and Foundations**, 1995, 35: 1-7.
- [20] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. **Geotechnique**, 1999, 49: 387-403.
- [21] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. **Geotechnique**, 1999, 49: 835-840.
- [22] YANG Y T, SUN G H, ZHENG H. Stability analysis of soil-rock-mixture slopes using the numerical manifold method[J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2019, 109: 153-160.
- [23] MICHALOWSKI R L. Stability of intact slopes with tensile strength cut-off[J]. **Geotechnique**, 2017, 67(8): 720-727.
- [24] DUNCAN J M, WRIGHT G S, BRANDON L T. Soil strength and slope stability[M]. 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2014.
- [25] SPENCER E. Effect of tension on the stability of embankments[J]. **Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division**, 1968, 94: 1159-1173.
- [26] MICHALOWSKI R L. Stability assessment of slopes with cracks using limit analysis[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2013, 50(10): 1011-1021.
- [27] UTILI S. Investigation by limit analysis on the stability of slopes with cracks[J]. **Geotechnique**, 2013, 63(2): 140-154.
- [28] PARK D, MICHALOWSKI R L. Three-dimensional stability analysis of slopes in hard soil/soft rock with tensile strength cut-off[J]. **Engineering Geology**, 2017, 229: 73-84.
- [29] MICHALOWSKI R L. Failure potential of infinite slopes in bonded soils with tensile strength cut-off[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2018, 55(4): 477-485.
- [30] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 等. 求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 626-629.
- ZHENG Hong, LI Chun-guang, LEE C F, et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(5): 626-629.
- [31] CHENG Y M, LANSIVAARA T, WEI W B. Two-dimensional slope stability analysis by limit equilibrium and strength reduction methods[J]. **Computers and Geotechnics**, 2007, 34(3): 137-150.

附录

为完整性起见,在此列出 GSPC 算法的伪代码。求解式(17)定义的 $\text{MiCP}(f_i, f_e)$ 的 GSPC 可采用这样的方式来调用:

$$(\lambda, \sigma) = \text{GSPC}(\lambda^0, \sigma^0) \quad (\text{A1})$$

式中: (λ^0, σ^0) 是输出 (λ, σ) 的迭代初值,一般情况下,令 $(\lambda^0, \sigma^0) = (0, \sigma_e)$, σ_e 的定义见式(14)。

下面伪代码中的//2*代表这句话将作为代码之后的第2个解释。

Step 0: Let $\beta_I = \beta_E = 1$; $k = 0$;

Step 1: $\bar{\lambda} = \max[\lambda - \beta_I f_I(\lambda, \sigma), 0]$; //1*

$$\bar{\sigma} = \sigma - \beta_E f_E(\bar{\lambda}, \sigma);$$

if $\|\bar{\lambda} - \lambda\|_{\infty} \leq \varepsilon_{\lambda} \|\bar{\lambda}\|_{\infty}$ and $\|\bar{\sigma} - \sigma\|_{\infty} \leq \varepsilon_{\sigma} \|\bar{\sigma}\|_{\infty}$ //2*

then $\lambda = \bar{\lambda}$; $\sigma = \bar{\sigma}$; break;

$$r_{\lambda} = \frac{\beta_I \|f_I(\lambda, \sigma) - f_I(\bar{\lambda}, \sigma)\|_2}{\|\lambda - \bar{\lambda}\|_2}; \quad //3^*$$

while $r_{\lambda} > \nu$ //4*

$$\beta_I = \frac{2}{3} \beta_I \min\left(1, \frac{1}{r_{\lambda}}\right); \quad \bar{\lambda} = \max[\lambda - \beta_I f_I(\lambda, \sigma), 0];$$

$$r_{\lambda} = \frac{\beta_I \|f_I(\lambda, \sigma) - f_I(\bar{\lambda}, \sigma)\|_2}{\|\lambda - \bar{\lambda}\|_2};$$

end(while);

$$r_{\sigma} = \frac{\beta_E \|f_E(\bar{\lambda}, \sigma) - f_E(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})\|_2}{\|\sigma - \bar{\sigma}\|_2};$$

while $r_{\sigma} > \nu$

$$\beta_E = \frac{2}{3} \beta_E \min\left(1, \frac{1}{r_{\sigma}}\right); \quad \bar{\sigma} = \sigma - \beta_E f_E(\bar{\lambda}, \sigma);$$

$$r_{\sigma} = \frac{\beta_E \|f_E(\bar{\lambda}, \sigma) - f_E(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})\|_2}{\|\sigma - \bar{\sigma}\|_2};$$

end(while);

$$d_{\lambda}(\lambda, \bar{\lambda}) = (\lambda - \bar{\lambda}) - \beta_I [f_I(\lambda, \sigma) - f_I(\bar{\lambda}, \sigma)];$$

$$\alpha = \frac{(\lambda - \bar{\lambda})^T d_{\lambda}(\lambda, \bar{\lambda})}{\|d_{\lambda}(\lambda, \bar{\lambda})\|_2^2}; \quad \lambda = \lambda - \gamma \alpha d_{\lambda}(\lambda, \bar{\lambda}); \quad //5^*$$

if $r_{\lambda} \leq \mu$ then $\beta_I = 1.5 \beta_I$; //6*

$$d_{\sigma}(\sigma, \bar{\sigma}) = (\sigma - \bar{\sigma}) - \beta_E [f_E(\bar{\lambda}, \sigma) - f_E(\bar{\lambda}, \bar{\sigma})];$$

$$\alpha = \frac{(\sigma - \bar{\sigma})^T d_{\sigma}(\sigma, \bar{\sigma})}{\|d_{\sigma}(\sigma, \bar{\sigma})\|_2^2}; \quad \sigma = \sigma - \gamma \alpha d_{\sigma}(\sigma, \bar{\sigma});$$

if $r_{\sigma} \leq \mu$ then $\beta_E = 1.5 \beta_E$;

Step 2. $k = k + 1$; go to Step 1.

//1* 假设 $\mathbf{a} = (a_i)$ 和 $\mathbf{b} = (b_i)$ 为相同维数的两个向量, 则表达式

$$\mathbf{c} = \max(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\text{A2})$$

会产生向量 $\mathbf{c} = (c_i)$, $\mathbf{c}$ 的维数同向量 $\mathbf{a}$, 且 $c_i = \max(a_i, b_i)$ 。

//2* 设 $\mathbf{x}$ 是以 $x_1, \dots, x_n$ 为分量的 n 维向量, 则 ε_{λ} 和 ε_{σ} 是 λ 和 σ 的相对误差, 如 $\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon_{\sigma} = 10^{-4}$ 就是一个极高的相对误差控制。

//3* 设 $\mathbf{x}$ 是以 $x_1, \dots, x_n$ 为分量的 n 维向量, 则

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A3})$$

//4*, //5*, //6* 根据 He^[15] 的建议: 参数 $\nu = 0.9$, $\gamma = 1.9$, $\mu = 0.4$ 。